Séries Formelles

Partie 2/2

par

Enrico Formenti

Mai 2023

Plan

- Partitions des entiers et séries génératrices
  - Diagrammes de Ferrers
- Applications
  - Démontrer des identités
  - Problèmes inverses
  - Problem solving
  - Langages rationnels
- Séries formelles exponentielles
- Compter les objets structurés

Partitions des entiers et séries génératrices

Le problème

La définition

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On appelle partition de n une séquence d'entiers $p_1, p_2, \ldots, p_k$ telle que $n = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$.

La question

Pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé combien y-a-t il de partitions à une permutation près ?

Une tentative bête

Prenons par exemple $n = 6$, on peut l'écrire comme :

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Pour obtenir une partition il suffit de remplacer un des (ou plus) symboles '$+$' par des '$,$' comme par exemple :

$$1 + 1 + 1, 1, 1 + 1$$

qui donne lieu à la partition :

$$3, 1, 2$$

Une tentative naïve : conclusion

Donc pour un n quelconque on peut changer entre 0 et $n-1$ symboles ce qui donne au total

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = 2^{n-1}$$

Problème

On compte beaucoup trop !

Le théorème de Euler

Théorème

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)X^n = (1+X+X^2+\cdots)(1+X^2+X^4+\cdots)(1+X^3+X^6+\cdots)\cdots$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} X^{kn}$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-X^k}$$

où $p(n)$ est le nombre de partitions de n à une permutation près.

Preuve (sketch)

Prenons un entier $n \in \mathbb{N}$ au hasard

$$\underbrace{(1^{0\cdot 1} + X^{1\cdot 1} + X^{2\cdot 1} + \cdots)}_{\text{groupe } 1}\underbrace{(1^{0\cdot 2} + X^{1\cdot 2} + X^{2\cdot 2} + \cdots)}_{\text{groupe } 2}\underbrace{(1^{0\cdot 3} + X^{1\cdot 3} + X^{2\cdot 3} + \cdots)}_{\text{groupe } 3}\cdots$$

- pour fabriquer X^n il faut choisir exactement un monôme par parenthèse ;
- X^n doit se former avec un nombre fini de choix de monômes et des 1 pour toute autre parenthèse ;
- $X^{c_1\cdot 1}X^{c_2\cdot 2}\ldots X^{c_n\cdot n} = X^{c_1\cdot 1+c_2\cdot 2+\ldots+c_n\cdot n} = X^n$

□

Remarques

- $c_i =$ nombre de fois que la partie *i* apparaît dans la partition de *n*
- on peut utiliser la même technique qu'Euler pour compter des partitions avec des propriétés supplémentaires

Notation

$$\mathcal{E}(X) = (1+X+X^2+\cdots)(1+X^2+X^4+\cdots)(1+X^3+X^6+\cdots)\cdots$$

Exemple

Proposition

Soit $p_u(n)$ le nombre de partitions en partie distinctes de n. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_u(n) X^n = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 - X^{2n+1}}$$

Preuve

c_i peut être soit 0 soit 1 donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p_u(n) X^n &= (1+X)(1+X^2)(1+X^3)\cdots \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} (1+X^n) \\
&= \frac{1-X^2}{1-X} \cdot \frac{1-X^4}{1-X^2} \cdot \frac{1-X^6}{1-X^3} \cdot \frac{1-X^8}{1-X^4} \cdot \frac{1-X^{10}}{1-X^5} \cdots \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-X^{2n+1}}
\end{aligned}$$

$\square$

Encore un...

Proposition

Soit $p_i(n)$ le nombre de partitions en parties impaires de n. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_i(n) X^n = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 - X^{2n+1}}$$

Preuve

Dans ce cas $c_k = h \in \mathbb{N}$ si k est impair ; 0 sinon. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p_i(n) X^n &= \underbrace{(1 + X + X^2 + \ldots)}_{\text{groupe } 1} \underbrace{(1 + X^3 + X^6 + \ldots)}_{\text{groupe } 3} \underbrace{(1 + X^5 + X^{10} + \ldots)}_{\text{groupe } 5} \cdots \\
&= \frac{1}{1-X} \cdot \frac{1}{1-X^3} \cdot \frac{1}{1-X^5} \cdots \\
&= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-X^{2n+1}}
\end{aligned}$$

$\square$

Enfin... deux !

Proposition

Soit $p_{nu}(n)$ le nombre de partitions de n ne contenant aucune partie de taille 1. Alors,

$$P_{nu}(X) = (1 - X)\mathcal{E}(X)$$

et donc $p_{nu}(n) = p(n) - p(n-1)$.

Preuve

Il faut imposer $c_1 = 0$, puis les autres c_i (avec $i > 1$) peuvent être quelconques, donc :

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} p_{nu}(n)X^n &= (1 + X^2 + X^4 + \cdots)(1 + X^3 + X^6 + \cdots)\cdots \\
&= \prod_{k=2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} X^{kn} \\
&= (1 - X)\mathcal{E}(X) \qquad \square
\end{aligned}$$

Un exemple différent

Proposition

Montrer que $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+X^{2^n}\right)=\frac{1}{1-X}$

Preuve

Réfléchissons à la Euler…

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+X^{2^n}\right)=(1+X^{2^0})(1+X^{2^1})(1+X^{2^2})\cdots$$

Ca compte donc le nombre de partitions de n en parties qui sont des puissances de 2 ! Comme chaque entier a une et une seule représentation binaire alors le nombre de partitions du point précédent est 1. Du coup :

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+X^{2^n}\right) &= (1+X^{2^0})(1+X^{2^1})(1+X^{2^2})\cdots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}X^n=\frac{1}{1-X}\end{aligned}$$

$\square$

Diagrammes de Ferrers

Définition

Un diagramme de Ferrers sert à illustrer graphiquement une partition $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (ordonnée de manière non décroissante) d'un entier. On représente chaque élément p_i de la partition comme une colonne de carrés unitaires dont la hauteur est p_i.

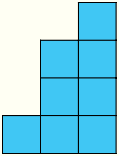


Diagramme de Ferrers de 8=4+3+1.

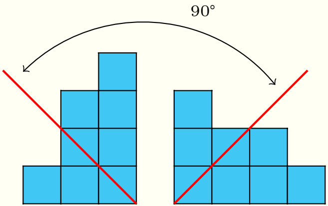
(suite...)

Définition

Soit $p(n,k)$ le nombre de partitions de l'entier n en partie de taille au plus k.

Théorème

$p(n,k)$ est égal au nombre de partitions de n en k parties.



(suite...)

Théorème

$$p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k)$$

Preuve

On considère deux cas :

- la plus petite partie $= 1$: donc il reste $n-1$ unités à répartir sur $k-1$ colonnes ;
- la plus petite partie > 1 : donc on a déjà réparti k unités (une pour chaque colonne) et il reste $n-k$ à répartir sur k colonnes. □

Conséquence

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(n,k) = \sum_{k=1}^{n} p(n-1,k-1) + p(n-k,k)$$

Applications

Prouver des identités

Exercice 1

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Preuve

Trouvons d'abord la SG U de la suite $u_n = n$.

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} nX^n = \sum_{n=1}^{\infty} nX^n = X \sum_{n=1}^{\infty} nX^{n-1} = \frac{X}{(1-X)^2}$$

Alors la suite des sommes partielles $S(U)$ de U est donnée par :

$$S(U) = U \cdot \frac{1}{1-X} = \frac{X}{(1-X)^3}$$

(suite...)

Décomposons en fractions simples :

$$\frac{A}{1-X} + \frac{B}{(1-X)^2} + \frac{C}{(1-X)^3} = \frac{X}{(1-X)^3}$$

ce qui donne lieux au système suivant :

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = -1 \\ B + C = 0 \end{cases}$$

qui a pour solution $A = 0, B = -1$ et $C = 1$. Donc :

$$\begin{aligned} S(U) &= \tfrac{1}{(1-X)^3} - \tfrac{1}{(1-X)^2} = \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)X^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)X^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} - (n+1)\right]X^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}X^n \end{aligned}$$

(suite...)

Exercice 2

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Preuve

Trouvons d'abord la SG U de la suite $u_n = n^2$.

$$
\begin{aligned}
U &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 X^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)X^n - \sum_{n=0}^{\infty} nX^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)X^n - \sum_{n=1}^{\infty} nX^n \\
&= X\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)X^{n-1} - X\sum_{n=1}^{\infty} nX^{n-1} \\
&= \frac{2X}{(1-X)^3} - \frac{X}{(1-X)^2} = \frac{X^2+X}{(1-X^3)}
\end{aligned}
$$

(suite...)

Alors la suite des sommes partielles $S(U)$ de U est donnée par :

$$S(U) = U \cdot \frac{1}{1-X} = \frac{X^2+X}{(1-X)^4}$$

Décomposons maintenant $S(U)$ en fractions simples :

$$\frac{A}{1-X} + \frac{B}{(1-X)^2} + \frac{C}{(1-X)^3} + \frac{D}{(1-X)^4} = \frac{X^2+X}{(1-X)^4}$$

ce qui donne lieu au système suivant :

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ -2B - C = 1 \\ B + C + D = 0 \end{cases}$$

qui a pour solution $A = 0, B = 1, C = -3$ et $D = 2$.

(suite...)

Donc on trouve :

$$\begin{aligned}
S(U) &= \frac{2}{(1-X)^4} - \frac{3}{(1-X)^3} + \frac{1}{(1-X)^2} \\
&= \frac{2}{6} \cdot D^3\left(\frac{1}{1-X}\right) - \frac{3}{2} \cdot D^2\left(\frac{1}{1-X}\right) + D\left(\frac{1}{1-X}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} - \frac{3}{2}(n+1)(n+2) + (n+1) \right] \cdot X^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} X^n
\end{aligned}$$

Problèmes inverses

Cas 1 : fonction analytique connue

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique dont on connait la forme close et posons $U_n = f(n)$ alors il suffira de soustraire deux termes successifs :

$$\begin{array}{rcl} U_n & = & f(n) \\ U_{n-1} & = & f(n-1) \end{array}$$

et donc nous avons que $f(n)$ est la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} U_n & = & U_{n-1} + f(n) - f(n-1) \\ U_0 & = & f(0) \end{array} \right.$$

Remarque : si $0 \notin \mathrm{Dom}(f)$ alors on peut poser $U_k = f(k)$ où k est le plus petit élément pour lequel f est définie.

(suite...)

Exercice 3

Trouver une récurrence dont la solution est $f(n) = n^2$.

Solution

Nous avons $f(n) - f(n-1) = 2n - 1$ et $f(0) = 0$ donc :

$$\begin{cases} U_n & = & U_{n-1} + 2n - 1 \\ U_0 & = & 0 \end{cases}$$

Question : quels sont les avantages d'avoir cette récurrence à la place de la forme analytique ?

(suite...)

Cas 2 : fonction analytique inconnue mais SG U connue

Nous avons plusieurs sous-cas :

1. U est une fonction rationnelle : alors on procède comme déjà vu ;
2. U est un produit de d'autres SG alors on procède comme suit :
   - on passe aux logs
   - on transforme le log d'un produit en la somme de logs
   - on simplifie autant que possible
   - on prend la dérivée (première)
   - on simplifie autant que possible
   - on pose les bonnes conditions

Example

Proposition

Soit $\mathcal{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)X^n$ alors

$$p(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma(k)p(n-k)$$

où $\sigma(k)$ est la somme des diviseurs de l'entier k et $p(0) = 1$.

Preuve

Partons de la série génératrice et passons aux logs :

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} X^{kn} = \ln \mathcal{E}(X)$$

(suite...)

Transformons les logs d'un produit en somme de logs :

$$\sum_{n=1}^{\infty} - \ln(1 - X^n) = \ln \mathcal{E}(X)$$

Prenons la dérivée de chaque coté de l'équation :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nX^{n-1}}{1 - X^n} = \frac{\mathcal{E}'(X)}{\mathcal{E}(X)}$$

Multiplions tout par X et par $\mathcal{E}(X)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nX^n}{1 - X^n} \mathcal{E}(X) = X\mathcal{E}'(X)$$

(suite...)

Occupons nous de la partie gauche de l'équation en oubliant $\mathcal{E}(X)$ pour l'instant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} nX^n \sum_{k=0}^{\infty} X^{kn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a=0}^{n} a \cdot div(a,n) X^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) X^n$$

où le prédicat $div(a,n) = 1$ si $\gcd(a,n) = a; 0$, sinon.
Re-injectons maintenant $\mathcal{E}(X)$ dans le membre de gauche :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) X^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p(n) X^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) p(n-k)\, X^n}_{n\text{-ième coeff.}}$$

(suite et fin)

Pour le membre de droite nous avons :

$$X\mathcal{E}'(X) = X \cdot \sum_{n=1}^{\infty} np(n)X^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} np(n)X^{n}$$

maintenant il suffira de mettre en équation le n-ième terme de gauche avec le n-ième terme de droite. $\square$

Question : quels sont les avantages d'avoir cette récurrence ?

The change making problem

Problème : soient $c_1, c_2, \ldots, c_k$ des types distincts de monnaies d'une certaine divise D. Soit T une somme d'argent exprimée en D. De combien de manières on peut échanger la somme T en utilisant des pièces de types donnés ?
Ici une 'manière' est une séquence $n_1, n_2, \ldots, n_k$ telle que

$$c_1 n_1 + c_2 n_2 + \ldots + c_k n_k = T$$

Donc réfléchissant à la Euler on dirait que la réponse est :

$$[X^T] \prod_{n=1}^{k} \frac{1}{1 - X^{c_n}}$$

Un exemple numérique

Supposons d'avoir trois types de pièces d'une valeur de 3, 5, et 7 respectivement. Soit $T = 100$ alors nous cherchons

$$[X^{100}]\ \frac{1}{1-X^3}\cdot\frac{1}{1-X^5}\cdot\frac{1}{1-X^7}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} X^{3n}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} X^{5n}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} X^{7n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{3a+5b=n} 1\right) X^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty} X^{7n}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{3a+5b+7c=n} 1\right) X^n
\end{aligned}$$

SG et langages rationnels

Soit $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ un alphabet fini et L un langage rationnel sur Σ.

SG associée à L

On la défini $S(E)$, la SG associée au langage L ayant une expression rationnelle E inductivement à partir de E :

- si $E = \emptyset$ alors $S(E) = 0$;
- si $E = \varepsilon$ alors $S(E) = 1$;
- si $E = \sigma_i \in \Sigma$ pour $i \in \{1, \ldots, k\}$ alors $S(E) = X$;
- si $E = F + G$ alors $S(E) = S(F) + S(G)$;
- si $E = FG$ alors $S(E) = S(F) \cdot S(G)$;
- si $E = F^\star$ alors $S(E) = \frac{1}{1-S(F)}$.

A quoi ça sert ?

Soit E l'expression régulière associé au langage L. Alors

$$S(E) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n \cdot X^n$$

où L_n est le nombre de mots de L de taille n.

Exemple

Soit $E = \{0+1\}^* \, 11 \, \{0+1\}^*$ avec alphabet $\Sigma = \{0,1\}$ alors

$$E = \underbrace{\{0+1\}^*}_{A} \cdot \underbrace{11}_{B} \cdot \underbrace{\{0+1\}^*}_{A}$$

Nous avons :

$S(A) = \frac{1}{1-S(0+1)}$
$S(0+1) = S(0) + S(1) = 2X$
$S(B) = S(1)S(1) = X^2$

et donc

$$S(E) = \left(\frac{X}{1-2X}\right)^2$$

(suite...)

Remarquons que

$$\frac{X}{1-2X} = X \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^n X^n$$

et donc

$$\begin{aligned}
S(E) &= X^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n X^n \right)^2 \\
&= X^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (2^k X^k) \cdot (2^{n-k} X^{n-k}) \\
&= X^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} 2^n \right) X^n \\
&= X^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) 2^n X^n
\end{aligned}$$

(suite...)

Conclusion :

C'EST FAUX !

En effet on compte beaucoup trop !

$\rightarrow$ Expliquer pourquoi !

Exercice

Exercice

Considérez l'expression régulière $E = (0 + 10)^{\star}11(0 + 1)^{\star}$ et répondez aux questions suivantes :

1. montrez qu'elle décrit le même langage que l'expression de l'exemple précédent
2. trouvez la fonction génératrice associée
3. trouvez L_n en fonction de n seulement où L_n est le nombre de mots du langage décrit par E de taille n.

Encore un...

Soit $E = (0 + 10^*1)^*$ avec alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ alors

$$E = \Big(\underbrace{0}_{A} + \underbrace{10^*1}_{B}\Big)^*$$

et donc

$$S(A) = X$$
$$S(B) = S(1) \cdot S(0^*) \cdot S(1) = \frac{X^2}{1-X}$$
$$S(A+B) = X + \frac{X^2}{1-X} = \frac{X}{1-X}$$
$$S(E) = \frac{1}{1-S(A+B)} = \frac{1-X}{1-2X} = \frac{1}{1-2X} - \frac{X}{1-2X} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n X^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n X^{n+1}$$

on conclut : $L_0 = 1$ et $L_n = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ pour $n > 0$.

Séries formelles exponentielles

Idée

$$\underbrace{\begin{array}{cccccc} u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_n & \dots \\ \frac{X^0}{0!} & \frac{X^1}{1!} & \frac{X^2}{2!} & \dots & \frac{X^n}{n!} & \dots \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$u_0\frac{X^0}{0!} \quad u_1\frac{X^1}{1!} \quad u_2\frac{X^2}{2!} \quad \dots \quad u_n\frac{X^n}{n!} \quad \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot \frac{X^n}{n!}$$

Séries formelles exponentielles

Définition

Soit $\mathbb{K}$ un coprs commutatif. Une série formelle exponentielle sur $\mathbb{K}$ à une indéterminée X est une suite infinie de valeurs U_n dans $\mathbb{K}$ notée

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n \cdot \frac{X^n}{n!} \tag{1}$$

Remarque

Pour nous $\mathbb{K}$ sera toujours $\mathbb{R}$ muni des opérations de somme et produit usuelles.

Comparaisons

séquence	SFE	SFO
$1, 1, 1, 1, 1, \ldots$	e^X	$\frac{1}{1-X}$
$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$	xe^X	$\frac{X}{(1-X)^2}$
$0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$	$(X + X^2)e^X$	$\frac{X+X^2}{(1-X)^3}$
$0^3, 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$	$(X + 3X^2 + X^3)e^X$	$\frac{X+4X^2+X^3}{(1-X)^4}$
$0!, 1!, 2!, 3!, 4!, \ldots$	$\frac{1}{1-X}$	?
$\binom{0}{k}, \binom{1}{k}, \binom{2}{k}, \binom{3}{k}, \binom{4}{k}, \ldots$	$\frac{X^k}{k!}e^X$	$\frac{X^k}{(1-X)^k}$
$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \binom{n}{4}, \ldots$	?	$(1 + X)^k$
$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$	e^{2X}	$\frac{1}{1-2X}$

Somme de sfe

Définition

Soient $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot \frac{X^n}{n!}$ et $V = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cdot \frac{X^n}{n!}$ deux séries formelles exponentielles sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$ alors leur somme est définie ainsi :

$$U + V = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) \cdot \frac{X^n}{n!}$$

Remarque : les séries formelles forment un groupe par rapport à la somme et la série 0 est l'élément neutre du groupe.

Produit de sfe

Définition

Soient $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot \frac{X^n}{n!}$ et $V = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cdot \frac{X^n}{n!}$ deux séries formelles exponentielles sur un corps commutation $\mathbb{K}$ alors leur produit est défini ainsi :

$$U \cdot V = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k v_{n-k} \right)}_{c_n} \cdot \frac{X^n}{n!}$$

Donc l'ens. des séries formelles exponentielles est fermé par rapport à l'opération de produit et la série 1 est l'élément neutre du produit.

Produit de plusieurs sfe

Définition

Soient $U^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(i)} \cdot \frac{X^n}{n!}$ pour i dans $\{1, \ldots, h\}$ des séries formelles exponentielles sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ alors leur produit est défini ainsi :

$$U^{(1)} \cdot \ldots \cdot U^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i_1+\ldots+i_h=n} \binom{n}{i_1, \ldots, i_h} u_{i_1}^{(1)} \cdot \ldots, \cdot u_{i_h}^{(h)} \right)}_{c_n} \cdot \frac{X^n}{n!}$$

Dérivation de sfe

Définition

Soit $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{X^n}{n!}$ une sfe sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. On définit l'opérateur $D(U)$ (noté aussi U'), appelé dérivée de U, comme suit :

$$D(U) = U' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n n \frac{X^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} \frac{X^n}{n!}$$

Conclusion

$$u_{n+1} = \left[\frac{X^n}{n!}\right] U'$$

Retour sur Fibonacci (shifté)

Reprenons le problème de Cauchy lié à la suite de Fibonacci :

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \quad \text{avec } U_1 = U_0 = 1$$

Donc on peut directement écrire :

$$U'' = U' + U$$

et donc :

$$Z^2 - Z - 1 = 0$$

ce qui donne :

$$U_n = a\phi^n + b(1-\phi)^n$$

et *in fine* :

$$U_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\phi^n + (1-\phi)^n\right)$$

La question

Quand est que l'on 'doit' utiliser une SFE ?

La réponse : quand a_n représente le nombre d'objets étiquetés/structurés à l'intérieur d'un ensemble d'objets de "taille" n.

Exemple

Combien de mot de taille n sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ contiennent un nombre impaire de a et un nombre impaire de b ?

Notons P_a, P_b, P_c les fonctions génératrices qui représentent les contraintes sur les lettres a, b et c, respectivement. Donc si l'on considère la contrainte sur la lettre a (ce sera pareil pour b) :

$$P_a = \sum_{k \text{ impair}}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et enfin comme sur c il n'y a pas de contraintes (ie. tout nombre est ok) on aura $P_c = e^x$.

(suite...)

Donc ce qu'on cherche c'est le coefficient $\left[\frac{X^n}{n!}\right]$ de :

$$P_a P_b P_c = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 e^x = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} e^x = \frac{e^{3x} - 2e^x + e^{-x}}{4}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{3^n - 2 + (-1)^n}{4}$$

Encore un

Combien de mots de taille n sur l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ y-a-t il qui contiennent au moins 2 lettres a ?

Notons la P_u la fonction génératrice de la lettre $u \in \{a, b, c, d\}$. Alors :

$$P_a = e^x - 1 - x \quad \text{et} \quad P_u = e^x \text{ pour } u \in \{b, c, d\}$$

Donc on cherche le coefficient $\left[\frac{X^n}{n!}\right]$ de :

$$(e^x - 1 - x)(e^x)^3 = e^{4x} - e^{3x} - xe^{3x}$$

et donc (pour $n \geq 2$) :

$$\left[\frac{X^n}{n!}\right] = 4^n - 3^n - n3^{n-1} = 4^n - (n+3) \cdot 3^{n-1}$$

Le petit calcul...

$$xe^{3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{X^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)3^n \frac{X^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} n3^{n-1} \cdot \frac{X^n}{n!}$$

Compter les objets structurés

Les objets

Nos objets

ces sont des objets comportant des nœuds qui peuvent être étiquettés (par des entiers) dont la taille est le nombre de nœuds canoniques (ie. un objet de taille n prends ses étiquettes dans $\{1, \ldots, n\}$)

Objet initial

c'est l'objet "vide" (et qui donc n'a aucune étiquette) de taille 0. On le note 1.

L'objet atomique (singleton)

c'est un objet de taille 1 qui porte donc une seule étiquette. On le notera X.

Les opérations

Etant donné des objets A et B on défini les cinq opérations suivantes :

- $A + B =$ union disjointe de A et B;
- $A \cdot B =$ produit Cartésien de A et B;
- $\mathrm{seq}(A) =$ tout possible séquence formée avec des objets de 'type' A;
- $\mathrm{set}(A) =$ ensembles d'objets de 'type' A;
- $\mathrm{cycle}(A) =$ les cycles dirigés d'objets de 'type' A.

Folklore

Théorème

Soient A, B, C des objets étiquetés et $A(X), B(X)$ et $C(X)$ leurs fonctions génératrices alors :

- si $C = A + B$ alors $C(X) = A(X) + B(X)$
- si $C = A \cdot B$ alors $C(X) = A(X) \cdot B(X)$
- si $C = \text{seq}(A)$ alors $C(X) = \frac{1}{1-A(X)}$
- si $C = \text{set}(A)$ alors $C(X) = e^{A(X)}$
- si $C = \text{cycle}(A)$ alors $C(X) = \log\left(\frac{1}{1-A(X)}\right)$

Modificateurs

Définition

Pour set, seq et cycle nous allons introduire un modificateur *card* suivi d'une expression *op n* où $op \in \{=, \leq, \geq\}$ et $n \in \mathbb{N}$ pour indiquer le cardinal de l'objet attendu. Par exemple,

$$\mathrm{set}(A, \mathrm{card} \geq n)$$

décrit un ensemble d'objets de 'type' *A* de cardinal plus grand ou égal à *n*.

Décrire une structure

Définition

Une description d'une structure $T = (T_0, T_1, \ldots, T_m)$ est une collection de $(m+1)$ équations telles que :

$$T_i = \Psi_i(T_0, T_1, \ldots, T_m)$$

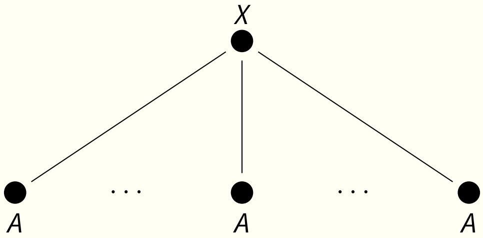
où les Ψ_i ces sont des termes fabriqués depuis $1, X$ ou l'une des opérations sur les objets.

Exemples de spécifications

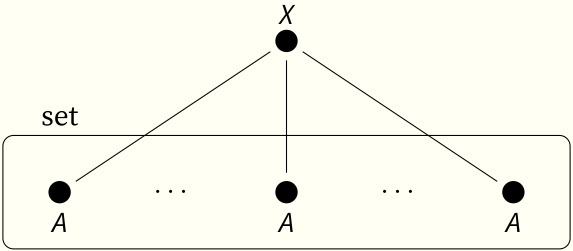
$A = X \cdot \mathrm{set}(A)$	Arbres étiquetés
$B = 1 + X \cdot B \cdot B$	Arbres binaires (non ordonnés)
$C = X \cdot \mathrm{seq}(C)$	Arbres ordonnés génériques
$D = \mathrm{set}(\mathrm{cycle}(X))$	Permutations/SDD finis bijectifs
$E = \mathrm{set}(\mathrm{cycle}(A))$	SDD finis/Graphs fonctionnels
$F = \mathrm{set}(\mathrm{set}(X, \mathrm{card} \geq 1))$	Partitions d'un ensemble
$G = X + X \cdot \mathrm{set}(G, \mathrm{card} = 3)))$	Arbres ternaires étiquetés
$H = \mathrm{set}(\mathrm{cycle}(X \cdot \mathrm{set}(G, \mathrm{card} = 2)))$	Graphes fonctionnels 3-réguliers
$L = \mathrm{seq}(\mathrm{set}(X, \mathrm{card} \geq 1))$	Fonctions surjectives

Explications

Explications



Explications



Pointer un objet

Définition

Soit $\mathcal{A}$ une description d'une classe de structures et A la sfe associée avec A_n le nombre d'objets de $\mathcal{A}$ de taille n. La version pointée de $\mathcal{A}$ est ΘA définie comme suit :

$$\Theta\mathcal{A} = \bigcup_{n>0} A_n \times [1, \ldots, n]$$

en d'autres termes les objets de la structure $\Theta\mathcal{A}$ ces sont ceux de $\mathcal{A}$ avec la particularité que s'ils ont une taille n alors l'un de leurs éléments (ayant étiquette entre 1 et n) sera distingué.

Pointer un objet (suite)

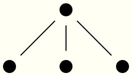
La nouvelle règle

Soient A et C des objets étiquetés et $A(X), C(X)$ leurs fonctions génératrices respectives alors :

- si $C = \Theta A$ alors $C(X) = X \cdot \frac{dA}{dX}$

Cela vient du fait que carrément : $C_n = nA_n$

Exemple



Pointer un objet (suite)

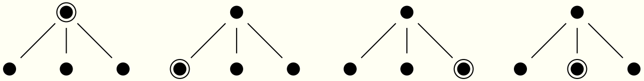
La nouvelle règle

Soient A et C des objets étiquetés et $A(X), C(X)$ leurs fonctions génératrices respectives alors :

- si $C = \Theta A$ alors $C(X) = X \cdot \frac{dA}{dX}$

Cela vient du fait que carrément : $C_n = nA_n$

Exemple



Exemple : les arbres ordonnés

Définition

Ces sont des arbres dont les fils d'un nœud sont ordonnés (comme s'ils étaient déssinés sur un plan).

On peut donner la description suivante :

$$T = X \cdot \mathrm{seq}(T)$$

donc en utilisant les règles on trouve

$$T = \frac{X}{1 - T}$$

c'est-à-dire :

$$T - T^2 = X$$

Exemple : les arbres ordonnés

ce qui implique :

$$T = \frac{1 \pm \sqrt{1-4X}}{2}$$

La solution $T = \frac{1+\sqrt{1-4X}}{2}$ est à exclure car elle ne satisfait pas $T(0) = 0$. Donc :

$$T = \frac{1 - \sqrt{1-4X}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n-1} X^n$$

avec $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (nombres de Catalan).

Permutations : première version

Si l'on suit traduit la description en suivant les séries formelles ordinaires :

$$D = \mathrm{set}(\mathrm{cycle}(X))$$

en utilisant les règles ça donne :

$$D(X) = e^{\log\left(\frac{1}{1-X}\right)} = \frac{1}{1-X} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$$

donc que signifie $[X^n]D(X) = 1$???

Permutations : deuxième version

Considérons plutôt les séries formelles exponentielles !

$$D(X) = \frac{1}{1-X} = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{X^n}{n!}$$

et donc $\left[\frac{X^n}{n!}\right] D(X) = n!$

Théorème d'inversion de Lagrange

Théorème d'inversion de Lagrange

Soit $\phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n u^n$ une SF inversible sur $\mathbb{C}$ L'équation fonctionnelle suivante :

$$T(X) = X \cdot \phi(T(X))$$

admet l'unique solution suivante (sur $\mathbb{C}$) :

$$T(X) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n X^n \quad \text{avec} \quad t_n = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\phi(u)^n$$

et (version de Baümann)

$$[X^n]T(X)^k = \frac{k}{n}[u^{n-k}]\phi(u)^n$$

Exemple : les arbres étiquetés (I)

On a dit que la description est la suivante :

$$A(X) = X \cdot \mathrm{set}(A(X))$$

ce qui donne après application des règles :

$$A(X) = X \cdot e^{A(X)}$$

si l'on pose $u = A(X)$ et $\phi(u) = e^{A(X)}$ (sachant que $e^{(\cdot)}$ est analytique) alors on peut appliquer le théorème d'inversion de Lagrange et trouver :

$$[X^n]A(X) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]e^{nu} = \frac{1}{n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!}$$

et donc $[\frac{X^n}{n!}]A(X) = n^{n-1}$

Exemple : les arbres étiquetés (II)

Soient donc :

$A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ = sfe associée aux arbres étiquetés

$\bar{A}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n X^n$ = sfe associée aux arbres étiquetés non enracinés

Clairement on a :

$$\Theta \bar{A} = A$$

c.-à-d. d'après nos règles :

$$A = X \cdot \bar{A}'$$

en explicitant les sf on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = X \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_n X^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_n X^n$$

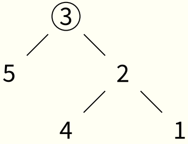
Exemple : les arbres étiquetés (III)

Et donc pour $n \geq 1$ on a

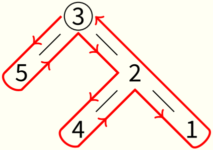
$$\bar{a}_n = \frac{a_n}{n} = \frac{n^{n-1}}{n} = n^{n-2}$$

qui est la formule classique de Cayley !

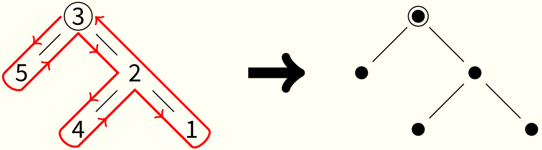
Arbres et étiquettes



Arbres et étiquettes

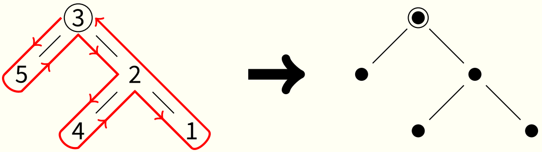


Arbres et étiquettes



$\times \quad (3, 5, 2, 4, 1)$

Arbres et étiquettes



x $(3, 5, 2, 4, 1)$

Conclusion

Chaque arbre non étiqueté produit $n!$ arbres étiquetés.

Exemple : k-forêts (I)

Définition

Une k-forêt est un ensemble non ordonné d'arbres étiquetés (enracinés)

donc une description d'un k-forêt pourrait être :

$$F^{(k)} = \mathrm{set}(T, \mathrm{card} = k)$$

et en utilisant nos règles :

$$F^{(k)} = e^{T^k}$$

on se rappelle que T satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$T = X \cdot e^T$$

Exemple : k-forêts (II)

d'après le théorème d'inversion de Lagrange (version de Baümann) :

$$[X^n]T^k = \frac{k}{n}[u^{n-k}]e^{nu} \quad \text{avec } u = T$$

et donc

$$[X^n]\,F^{(k)} = \frac{n!}{k!}\frac{[X^n]}{n!}T^k = \frac{n!}{k!}\cdot\frac{k}{n}\cdot n^{n-k} = \binom{n-1}{k-1}n^{n-k}$$

Ce qui reste à voir

- La construction pour pset et mset.
- Liens avec la génération aléatoire
- SF multivariées
- Croissance asymptotique
- Analyse des singularités

Références I

[1] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick.
Analytic Combinatorics.
Cambridge University Press, 2009.

[2] Philippe Flajolet, Paul Zimmermann, and Bernard Van Cutsem.
A calculus of random generation.
In Thomas Lengauer, editor, *Algorithms - ESA '93, First Annual European Symposium, Bad Honnef, Germany, September 30 - October 2, 1993, Proceedings*, volume 726 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 169–180. Springer, 1993.