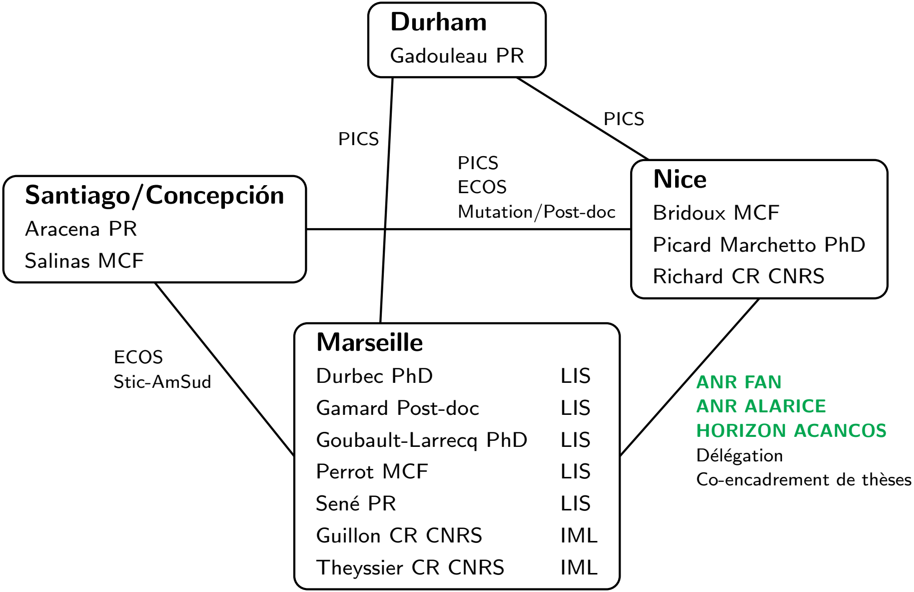
Réseaux d'automates

Quelques résultats marquants et problèmes ouverts

Adrien Richard

Équipe MC3 $\subseteq$ Laboratoire I3S $\subseteq$ CNRS $\cup$ UniCA

Séminaire CANA — 18 novembre 2025

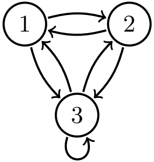

Durham
Gadouleau PR
PICS
PICS
PICS
ECOS
Mutation/Post-doc
Santiago/Concepción
Aracena PR
Salinas MCF
Nice
Bridoux MCF
Picard Marchetto PhD
Richard CR CNRS
ECOS
Stic-AmSud
Marseille
Durbec PhD LIS
Gamard Post-doc LIS
Goubault-Larrecq PhD LIS
Perrot MCF LIS
Sené PR LIS
Guillon CR CNRS IML
Theyssier CR CNRS IML
ANR FAN
ANR ALARICE
HORIZON ACANCOS
Délégation
Co-encadrement de thèses

"Un **système complexe** *est un système composé d'un grand nombre d'entités en* **interaction locale** *et simultanée.*

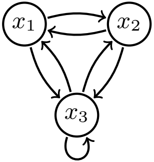
Lorsque l'on veut modéliser un système, on conçoit des **règles d'évolution***, puis l'on simule le système en* **itérant** *ces règles.*

Un système est dit complexe si le résultat final n'est **pas prédictible** *directement en connaissant les règles."*

[Wikipédia]

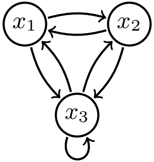


1) **Graphe d'interaction** G à n sommets



1) **Graphe d'interaction** G à n sommets

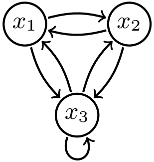
2) **Variable binaire** x_i sur chaque sommet i



1) **Graphe d'interaction** G à n sommets

2) **Variable binaire** x_i sur chaque sommet i

$\hookrightarrow$ **Configurations:** $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$



$$f_1(x) = x_2 \vee x_3$$
$$f_2(x) = \overline{x_1} \wedge \overline{x_3}$$
$$f_3(x) = x_3 \vee (x_1 \wedge x_2)$$

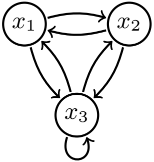
1) **Graphe d'interaction** G à n sommets

2) **Variable binaire** x_i sur chaque sommet i

   $\hookrightarrow$ **Configurations:** $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$

3) **Fonction de mise à jour** f_i sur chaque sommet i

Réseaux Booléens

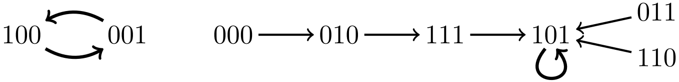


$$f_1(x) = x_2 \vee x_3$$
$$f_2(x) = \overline{x_1} \wedge \overline{x_3}$$
$$f_3(x) = x_3 \vee (x_1 \wedge x_2)$$

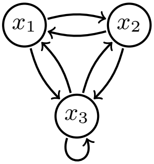
1) **Graphe d'interaction** G à n sommets
2) **Variable binaire** x_i sur chaque sommet i

   $\hookrightarrow$ **Configurations:** $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$
3) **Fonction de mise à jour** f_i sur chaque sommet i

   $\hookrightarrow$ **Dynamique résultante** $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$.

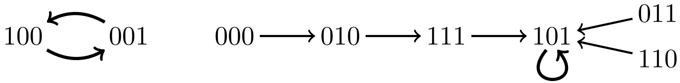


Réseaux Booléens / Réseaux d'automates



$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x_2 \vee x_3 \\
f_2(x) &= \overline{x_1} \wedge \overline{x_3} \\
f_3(x) &= x_3 \vee (x_1 \wedge x_2)
\end{aligned}
$$

1) **Graphe d'interaction** G à n sommets
2) **Variable binaire** x_i sur chaque sommet i
   $\hookrightarrow$ **Configurations:** $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$
3) **Fonction de mise à jour** f_i sur chaque sommet i
   $\hookrightarrow$ **Dynamique résultante** $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$.



Les réseaux Booléens sont-ils des systèmes complexes?

$\hookrightarrow$ Propriétés dynamiques de $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ **imprédictibles** ?

Les réseaux Booléens sont-ils des systèmes complexes?

$\hookrightarrow$ Propriétés dynamiques de $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ **imprédictibles** ?

On consider les propriétés exprimables par des **formules du premier ordre** sur $\{=,\to\}$: les variables sont les configurations et $x \to y$ signifie $f(x) = y$.

$$f \models \exists x, x \to x \quad \iff \quad f \text{ a un point fixe}$$

Les réseaux Booléens sont-ils des systèmes complexes?

$\hookrightarrow$ Propriétés dynamiques de $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ **imprédictibles** ?

On consider les propriétés exprimables par des **formules du premier ordre** sur $\{=, \to\}$: les variables sont les configurations et $x \to y$ signifie $f(x) = y$.

$$f \models \exists x, x \to x \quad \iff \quad f \text{ a un point fixe}$$

Une formule ϕ est **triviale** si elle a un nombre fini de modèles ou de contre-modèles; on décide alors si $f \models \phi$ en $O(1)$.

Les réseaux Booléens sont-ils des systèmes complexes?

$\hookrightarrow$ Propriétés dynamiques de $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ **imprédictibles** ?

On consider les propriétés exprimables par des **formules du premier ordre** sur $\{=, \to\}$: les variables sont les configurations et $x \to y$ signifie $f(x) = y$.

$$f \models \exists x, x \to x \quad \iff \quad f \text{ a un point fixe}$$

Une formule ϕ est **triviale** si elle a un nombre fini de modèles ou de contre-modèles; on décide alors si $f \models \phi$ en $O(1)$.

Théorème [Gamard, Goubault-Larrecq, Guillon, Perrot, Theyssier 2025+]
Soit ϕ fixée non-triviale. Décider si $f \models \phi$ est **NP**- ou **coNP-difficile**.

Les réseaux Booléens sont-ils des systèmes complexes?

$\hookrightarrow$ Propriétés dynamiques de $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ **imprédictibles** ?

On consider les propriétés exprimables par des **formules du premier ordre** sur $\{=, \to\}$: les variables sont les configurations et $x \to y$ signifie $f(x) = y$.

$$f \models \exists x, x \to x \quad \iff \quad f \text{ a un point fixe}$$

Une formule ϕ est **triviale** si elle a un nombre fini de modèles ou de contre-modèles; on décide alors si $f \models \phi$ en $O(1)$.

Théorème [Gamard, Goubault-Larrecq, Guillon, Perrot, Theyssier 2025+]
Soit ϕ fixée non-triviale. Décider si $f \models \phi$ est **NP**- ou **coNP-difficile**.

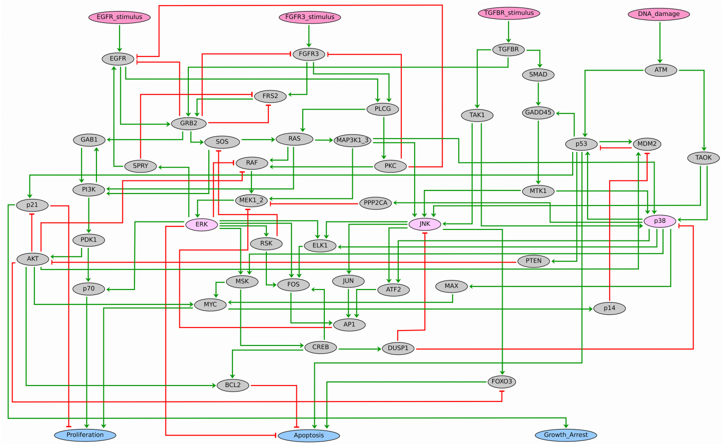
$\hookrightarrow$ **Théorème "à la Rice"** pour les réseaux Booléens.
$\hookrightarrow$ Usage technique de la théorie des modèles.

Réseaux Booléen et réseaux de gènes

RBs introduits pour les **réseaux de gènes** [Kauffman 1969, Thomas 1970]

Réseaux Booléen et réseaux de gènes

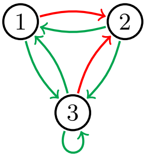
RBs introduits pour les **réseaux de gènes** [Kauffman 1969, Thomas 1970]



Réseaux Booléen et réseaux de gènes

RBs introduits pour les **réseaux de gènes** [Kauffman 1969, Thomas 1970]

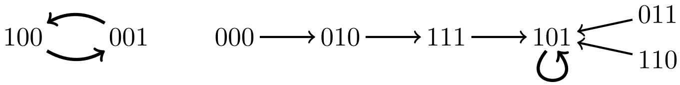
1. Graphe d'interaction signé G



2. Fonctions locales f_i consistantes

$$f_1(x) = x_2 \vee x_3$$
$$f_2(x) = \overline{x_1} \wedge \overline{x_3}$$
$$f_3(x) = x_3 \vee (x_1 \wedge x_2)$$

3. Fonction globale $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$



Réseaux Booléen et réseaux de gènes

RBs introduits pour les **réseaux de gènes** [Kauffman 1969, Thomas 1970]

Notation

$F(G) =$ ensemble des RBs f que le graphe signé G peut produire.

Réseaux Booléen et réseaux de gènes

RBs introduits pour les **réseaux de gènes** [Kauffman 1969, Thomas 1970]

Notation

$F(G) =$ ensemble des RBs f que le graphe signé G peut produire.

Question: Que peut-on dire sur les RBs que G peut produire ?

Question difficile: $F(G)$ est typiquement doublement exponentiel.

- $\boldsymbol{2^{n2^n}}$ RBs à n composantes,
- $\boldsymbol{4^{n^2}}$ graphes signés à n sommets.

Influence du graphe d'interaction

(1) Soit $\max(G)$ le plus grand nb de points fixes d'un RB $f \in F(G)$.

Influence du graphe d'interaction

(1) Soit $\max(G)$ le plus grand nb de points fixes d'un RB $f \in F(G)$.

$$\begin{array}{rcl} \text{points fixes} & \simeq & \text{types cellulaires} \\ \text{plusieurs points fixes} & \simeq & \text{processus de différentiation} \end{array}$$

Influence du graphe d'interaction

(1) Soit $\max(G)$ le plus grand nb de points fixes d'un RB $f \in F(G)$.

Borne du feedback [Aracena 2008]

$$\max(G) \leq 2^{\tau^+(G)}$$

Influence du graphe d'interaction

(1) Soit $\max(G)$ le plus grand nb de points fixes d'un RB $f \in F(G)$.

Borne du feedback [Aracena 2008]

$$\max(G) \leq 2^{\tau^+(G)}$$

$\hookrightarrow$ bcp de points fixes $\Rightarrow$ bcp de cycles positifs "peu" imbriqués.
$\hookrightarrow$ simple à prouver, difficile à améliorer !

Influence du graphe d'interaction

(1) Soit $\max(G)$ le plus grand nb de points fixes d'un RB $f \in F(G)$.

Borne du feedback [Aracena 2008]

$$\max(G) \leq 2^{\tau^+(G)}$$

$\hookrightarrow$ bcp de points fixes $\Rightarrow$ bcp de cycles positifs "peu" imbriqués.
$\hookrightarrow$ simple à prouver, difficile à améliorer !

Théorème [Aracena, Salinas, R. 2017]

Si G n'a que des arcs positifs, alors

$$\max(G) \leq 2 + \text{sommes des } \nu(G) - 1 \text{ plus grands coefficients } \binom{\tau(G)}{i}$$

Influence du graphe d'interaction

(1) Soit $\max(G)$ le plus grand nb de points fixes d'un RB $f \in F(G)$.

Borne du feedback [Aracena 2008]

$$\max(G) \leq 2^{\tau^+(G)}$$

$\hookrightarrow$ bcp de points fixes $\Rightarrow$ bcp de cycles positifs "peu" imbriqués.
$\hookrightarrow$ simple à prouver, difficile à améliorer !

Théorème [Aracena, Salinas, R. 2017]

Si G n'a que des arcs positifs, alors

$$\max(G) \leq 2 + \text{sommes des } \nu(G) - 1 \text{ plus grands coefficients } \binom{\tau(G)}{i}$$

$\hookrightarrow$ thm de Knaster-Tarski + lemme de Sperner généralisé [Erdös, 1945].
$\hookrightarrow$ $\nu(G) \leq \tau(G) \leq h(\nu(G))$ [Reed, Roberston, Seymour, Thomas 1996].

Influence du graphe d'interaction

(1) Soit $\max(G)$ le plus grand nb de points fixes d'un RB $f \in F(G)$.

Borne du feedback [Aracena 2008]

$$\max(G) \leq 2^{\tau^+(G)}$$

$\hookrightarrow$ bcp de points fixes $\Rightarrow$ bcp de cycles positifs "peu" imbriqués.
$\hookrightarrow$ simple à prouver, difficile à améliorer !

(2) Soit $\mathrm{per}(G)$ le plus grand nb de points périodiques d'un RB $f \in F(G)$.

Théorème [Gadouleau 2018]

$$\mathrm{per}(G) \leq 2^{\alpha(G)}$$

Influence du graphe d'interaction

(1) Soit $\max(G)$ le plus grand nb de points fixes d'un RB $f \in F(G)$.

Borne du feedback [Aracena 2008]

$$\max(G) \leq 2^{\tau^+(G)}$$

$\hookrightarrow$ bcp de points fixes $\Rightarrow$ bcp de cycles positifs "peu" imbriqués.
$\hookrightarrow$ simple à prouver, difficile à améliorer !

(2) Soit $\mathrm{per}(G)$ le plus grand nb de points périodiques d'un RB $f \in F(G)$.

Théorème [Gadouleau 2018]

$$\mathrm{per}(G) \leq 2^{\alpha(G)}$$

$\hookrightarrow$ dualité prog linéaire + max-flow min-cut.

Influence du graphe d'interaction

(1) Soit $\max(G)$ le plus grand nb de points fixes d'un RB $f \in F(G)$.

Borne du feedback [Aracena 2008]

$$\max(G) \leq 2^{\tau^+(G)}$$

$\hookrightarrow$ bcp de points fixes $\Rightarrow$ bcp de cycles positifs "peu" imbriqués.
$\hookrightarrow$ simple à prouver, difficile à améliorer !

(2) Soit $\mathrm{per}(G)$ le plus grand nb de points périodiques d'un RB $f \in F(G)$.

Théorème [Gadouleau 2018]

$$\mathrm{per}(G) \leq 2^{\alpha(G)}$$

$\hookrightarrow$ dualité prog linéaire $+$ max-flow min-cut.

Problème 1: Borne sup sur le **nb de cycles limites** dans cette veine.

Graphe d'interaction et complexité 1/2

Théorème [Bridoux, Durbec, Perrot, R. 2022]

Problème	$k = 1$	$k \geq 2$ fixé	k en entrée
$\max(G) \geq k$	**P**	**NP-complet**	**NEXPTIME-complet**
$\min(G) < k$	**NEXPTIME-complet**		

Graphe d'interaction et complexité 1/2

Théorème [Bridoux, Durbec, Perrot, R. 2022]

Problème	$k = 1$	$k \geq 2$ fixé	k en entrée
$\max(G) \geq k$	**P**	**NP-complet**	**NEXPTIME-complet**
$\min(G) < k$	**NEXPTIME-complet**		

[Robertson, Seymour, Thomas 1999]

Graphe d'interaction et complexité 1/2

Théorème [Bridoux, Durbec, Perrot, R. 2022]

Problème	$k = 1$	$k \geq 2$ fixé	k en entrée
$\max(G) \geq k$	**P**	**NP-complet**	**NEXPTIME-complet**
$\min(G) < k$	**NEXPTIME-complet**		

Si le degré entrant max de G est borné par une constant $d \geq 2$

Problème	$k = 1$	$k \geq 2$ fixé	k en entrée
$\max(G) \geq k$	**P**	**NP-complet**	**$\mathbf{NP^{\#P}}$-complet**
$\min(G) < k$	**$\mathbf{NP^{NP}}$-complet**		**$\mathbf{NP^{\#P}}$-complet**

Graphe d'interaction et complexité 1/2

Théorème [Bridoux, Durbec, Perrot, R. 2022]

Problème	$k = 1$	$k \geq 2$ fixé	k en entrée
$\max(G) \geq k$	**P**	**NP-complet**	**NEXPTIME-complet**
$\min(G) < k$	**NEXPTIME-complet**		

Si le degré entrant max de G est borné par une constant $d \geq 2$

Problème	$k = 1$	$k \geq 2$ fixé	k en entrée
$\max(G) \geq k$	**P**	**NP-complet**	**$\mathbf{NP^{\#P}}$-complet**
$\min(G) < k$	**$\mathbf{NP^{NP}}$-complet**		**$\mathbf{NP^{\#P}}$-complet**

Corollaire Décider si $\max(G) = 2^{\tau^+(G)}$ est **NEXPTIME-complet**.

Graphe d'interaction et complexité 2/2

Soit ϕ un formule du premier ordre sur $\{=, \rightarrow\}$.

$$G \models \phi \iff \exists f \in F(G),\ f \models \phi$$

Graphe d'interaction et complexité 2/2

Soit ϕ un formule du premier ordre sur $\{=, \rightarrow\}$.

$$G \models \phi \iff \exists f \in F(G),\ f \models \phi$$

Pour certaines formules ϕ, décider si $G \models \phi$ est NEXPTIME-complet :

$$G \models \forall x,\ x \nrightarrow x \iff \min(G) = 0,$$

Graphe d'interaction et complexité 2/2

Soit ϕ un formule du premier ordre sur $\{=, \to\}$.

$$G \models \phi \iff \exists f \in F(G),\ f \models \phi$$

Pour certaines formules ϕ, décider si $G \models \phi$ est NEXPTIME-complet :

$$G \models \forall x,\ x \nrightarrow x \iff \min(G) = 0,$$

Soit H **sans** signe; avec des définitions analogues on a

$$H \models \forall x,\ x \nrightarrow x \iff \min(H) = 0 \iff H \text{ a un cycle.}$$

Graphe d'interaction et complexité 2/2

Soit ϕ un formule du premier ordre sur $\{=, \rightarrow\}$.

$$G \models \phi \iff \exists f \in F(G),\ f \models \phi$$

Pour certaines formules ϕ, décider si $G \models \phi$ est NEXPTIME-complet :

$$G \models \forall x,\ x \nrightarrow x \iff \min(G) = 0,$$

Soit H **sans** signe; avec des définitions analogues on a

$$H \models \forall x,\ x \nrightarrow x \iff \min(H) = 0 \iff H \text{ a un cycle.}$$

Problème 2: Trouver ϕ telle qu'il est NP-difficile de décider si $H \models \phi$.

Graphe d'interaction et complexité 2/2

Soit ϕ un formule du premier ordre sur $\{=, \to\}$.

$$G \models \phi \iff \exists f \in F(G),\ f \models \phi$$

Pour certaines formules ϕ, décider si $G \models \phi$ est NEXPTIME-complet :

$$G \models \forall x,\ x \nrightarrow x \iff \min(G) = 0,$$

Soit H **sans** signe; avec des définitions analogues on a

$$H \models \forall x,\ x \nrightarrow x \iff \min(H) = 0 \iff H \text{ a un cycle.}$$

Problème 2: Trouver ϕ telle qu'il est NP-difficile de décider si $H \models \phi$.

$\hookrightarrow$ candidat : **point fixe unique** : $\exists x,\ (x \to x \wedge (\forall y,\ x \neq y \Rightarrow y \nrightarrow y))$.

Isomorphisme 1/3

Propriétés dynamiques étudiées souvent **invariantes par isomorphisme**

- nombres de points fixes/périodiques
- nombres/longueurs des cycles limites
- formules du premier ordre sur $\{=, \to\}$

Isomorphisme 1/3

Propriétés dynamiques étudiées souvent **invariantes par isomorphisme**

- nombres de points fixes/périodiques
- nombres/longueurs des cycles limites
- formules du premier ordre sur $\{=, \to\}$

Notation

$F[G]$ = l'ensemble des RBs f **isomorphes** à un RB dans $F(G)$

Isomorphisme 1/3

Propriétés dynamiques étudiées souvent **invariantes par isomorphisme**

- nombres de points fixes/périodiques
- nombres/longueurs des cycles limites
- formules du premier ordre sur $\{=, \to\}$

Notation

$F[G]$ = l'ensemble des RBs f **isomorphes** à un RB dans $F(G)$

Théorème [Bridoux, Perrot, Picard, R. 2023]

$F[K_n]$ est l'ensemble des réseaux Booléens $f \neq \mathrm{cst}, \mathrm{id}$ à n composantes.

Isomorphisme 1/3

Propriétés dynamiques étudiées souvent **invariantes par isomorphisme**

- nombres de points fixes/périodiques
- nombres/longueurs des cycles limites
- formules du premier ordre sur $\{=, \to\}$

Notation

$F[G]$ = l'ensemble des RBs f **isomorphes** à un RB dans $F(G)$

Théorème [Bridoux, Perrot, Picard, R. 2023]

$F[K_n]$ est l'ensemble des réseaux Booléens $f \neq \mathrm{cst}, \mathrm{id}$ à n composantes.

$\hookrightarrow$ K_n "universel" : il peut produire toutes les RBs (intéressants)
$\hookrightarrow$ aucun autre graphe n'a cette propriété.

Isomorphisme 1/3

Propriétés dynamiques étudiées souvent **invariantes par isomorphisme**

- nombres de points fixes/périodiques
- nombres/longueurs des cycles limites
- formules du premier ordre sur $\{=, \to\}$

Notation

$F[G]$ = l'ensemble des RBs f **isomorphes** à un RB dans $F(G)$

Théorème [Bridoux, Perrot, Picard, R. 2023]

$F[K_n]$ est l'ensemble des réseaux Booléens $f \neq \mathrm{cst}, \mathrm{id}$ à n composantes.

$\hookrightarrow$ K_n "universel" : il peut produire toutes les RBs (intéressants)
$\hookrightarrow$ aucun autre graphe n'a cette propriété.

Théorème [Bridoux, Perrot, Picard, R. 2023]

Pout tout réseau Booléen f, il exists G tel que $f \in F[G]$ et $\delta^-(G) \leq 5$.

Isomorphisme 1/3

Propriétés dynamiques étudiées souvent **invariantes par isomorphisme**

- nombres de points fixes/périodiques
- nombres/longueurs des cycles limites
- formules du premier ordre sur $\{=, \to\}$

Notation

$F[G]$ = l'ensemble des RBs f **isomorphes** à un RB dans $F(G)$

Théorème [Bridoux, Perrot, Picard, R. 2023]

$F[K_n]$ est l'ensemble des réseaux Booléens $f \neq \mathrm{cst}, \mathrm{id}$ à n composantes.

$\hookrightarrow$ K_n "universel" : il peut produire toutes les RBs (intéressants)
$\hookrightarrow$ aucun autre graphe n'a cette propriété.

Théorème [Bridoux, Perrot, Picard, R. 2023]

Pout tout réseau Booléen f, il exists G tel que $f \in F[G]$ et $\delta^-(G) \leq 5$.

$\hookrightarrow$ théorie additive des nombres [Alon, Dubiner 1996]

Isomorphisme 2/3

Soit $F_q(G)$ l'ensemble des réseaux d'automates sur l'alphabet de taille q dont le graphe d'interaction est G, et $F_q[G]$ sa clôture isomorphique.

Isomorphisme 2/3

Soit $F_q(G)$ l'ensemble des réseaux d'automates sur l'alphabet de taille q dont le graphe d'interaction est G, et $F_q[G]$ sa clôture isomorphique.

Théorème [Bridoux, Picard, R. 2026]

Il existe f à n composantes sur l'alphabet de taille $q = 3^n$ tel que

$$f \in F_q[G] \text{ pour tout graphe non-vide } G$$

Isomorphisme 2/3

Soit $F_q(G)$ l'ensemble des réseaux d'automates sur l'alphabet de taille q dont le graphe d'interaction est G, et $F_q[G]$ sa clôture isomorphique.

Théorème [Bridoux, Picard, R. 2026]

Il existe f à n composantes sur l'alphabet de taille $q = 3^n$ tel que

$$f \in F_q[G] \text{ pour tout graphe non-vide } G$$

$\hookrightarrow$ f "universel" : peut être produit par tous les graphes (intéressants)
$\hookrightarrow$ $q = q_1 q_2 \dots q_n$ avec $\prod(q_i - 1) \geq 2^n$ est nécessaire et suffisant.

Isomorphisme 2/3

Soit $F_q(G)$ l'ensemble des réseaux d'automates sur l'alphabet de taille q dont le graphe d'interaction est G, et $F_q[G]$ sa clôture isomorphique.

Théorème [Bridoux, Picard, R. 2026]

Il existe f à n composantes sur l'alphabet de taille $q = 3^n$ tel que

$$f \in F_q[G] \text{ pour tout graphe non-vide } G$$

$\hookrightarrow$ f "universel" : peut être produit par tous les graphes (intéressants)
$\hookrightarrow$ $q = q_1 q_2 \dots q_n$ avec $\prod(q_i - 1) \geq 2^n$ est nécessaire et suffisant.

Théorème [Bridoux, Picard, R. 2026]

Soit $q \geq 3$. Il existe f à n composantes sur l'alphabet de taille q tel que

$$f \in F_q[G] \text{ pour tout graphe Hamiltonien } G.$$

Isomorphisme 2/3

Soit $F_q(G)$ l'ensemble des réseaux d'automates sur l'alphabet de taille q dont le graphe d'interaction est G, et $F_q[G]$ sa clôture isomorphique.

Théorème [Bridoux, Picard, R. 2026]

Il existe f à n composantes sur l'alphabet de taille $q = 3^n$ tel que

$$f \in F_q[G] \text{ pour tout graphe non-vide } G$$

$\hookrightarrow$ f "universel" : peut être produit par tous les graphes (intéressants)
$\hookrightarrow$ $q = q_1 q_2 \dots q_n$ avec $\prod(q_i - 1) \geq 2^n$ est nécessaire et suffisant.

Théorème [Bridoux, Picard, R. 2026]

Soit $q \geq 3$. Il existe f à n composantes sur l'alphabet de taille q tel que

$$f \in F_q[G] \text{ pour tout graphe Hamiltonien } G.$$

Problème 3: Universalité dans le cas binaire.

Isomorphisme 3/3

Problème 4: Complexité de décider si un RB f (donné explicitement) peut être produit par un graphe acyclique ($\exists G$ acyclique tel que $f \in F[G]$).

Isomorphisme 3/3

Problème 4: Complexité de décider si un RB f (donné explicitement) peut être produit par un graphe acyclique ($\exists G$ acyclique tel que $f \in F[G]$).

$\hookrightarrow$ dans NP.

Isomorphisme 3/3

Problème 4: Complexité de décider si un RB f (donné explicitement) peut être produit par un graphe acyclique ($\exists G$ acyclique tel que $f \in F[G]$).

$\hookrightarrow$ dans NP.

Motivation:

Théorème de Robert [1980]

Si G est acyclic de hauteur k, alors $f^k = \mathrm{cst}$ pour tout $f \in F(G)$.

Isomorphisme 3/3

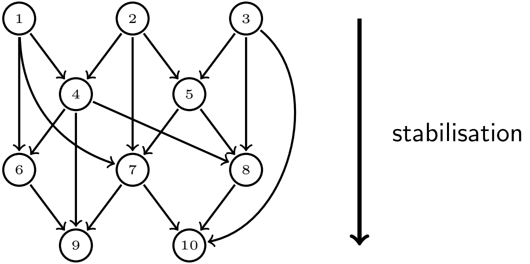
Problème 4: Complexité de décider si un RB f (donné explicitement) peut être produit par un graphe acyclique ($\exists G$ acyclique tel que $f \in F[G]$).

$\hookrightarrow$ dans NP.

Motivation:

Théorème de Robert [1980]

Si G est acyclic de hauteur k, alors $f^k = \mathrm{cst}$ pour tout $f \in F(G)$.



Isomorphisme 3/3

Problème 4: Complexité de décider si un RB f (donné explicitement) peut être produit par un graphe acyclique ($\exists G$ acyclique tel que $f \in F[G]$).

$\hookrightarrow$ dans NP.

Motivation:

Théorème de Robert [1980]

Si G est acyclic de hauteur k, alors $f^k = \mathrm{cst}$ pour tout $f \in F(G)$.

$\hookrightarrow$ les graphes acycliques produisent des dynamiques “simples”.

Isomorphisme 3/3

Problème 4: Complexité de décider si un RB f (donné explicitement) peut être produit par un graphe acyclique ($\exists G$ acyclique tel que $f \in F[G]$).

$\hookrightarrow$ dans NP.

Motivation:

Théorème de Robert [1980]

Si G est acyclic de hauteur k, alors $f^k = \mathrm{cst}$ pour tout $f \in F(G)$.

$\hookrightarrow$ les graphes acycliques produisent des dynamiques “simples”.

$\hookrightarrow$ le problème 4 questionne formellement cette simplicité.

Localiser les fonctions locales

Soit $F(n)$ l'ensemble des RBs à n composantes.

Soit $F(n, d)$ l'ensemble des $f \in F(n)$ avec un GI G vérifiant $\Delta^-(G) \leq d$.
$\hookrightarrow$ chaque fonction locale f_i dépend d'au plus d composantes.

Localiser les fonctions locales

Soit $F(n)$ l'ensemble des RBs à n composantes.

Soit $F(n,d)$ l'ensemble des $f \in F(n)$ avec un GI G vérifiant $\Delta^-(G) \leq d$.
$\hookrightarrow$ chaque fonction locale f_i dépend d'au plus d composantes.

Pour d fixé, la condition $\Delta^-(G) \leq d$ est **naturelle** et **très très forte**:

$$|F(n,d)| \leq (2^{2^{d+1}})^n \qquad |F(n)| = (2^{2^n})^n$$

Localiser les fonctions locales

Soit $F(n)$ l'ensemble des RBs à n composantes.

Soit $F(n,d)$ l'ensemble des $f \in F(n)$ avec un GI G vérifiant $\Delta^-(G) \leq d$.
$\hookrightarrow$ chaque fonction locale f_i dépend d'au plus d composantes.

Pour d fixé, la condition $\Delta^-(G) \leq d$ est **naturelle** et **très très forte**:

$$|F(n,d)| \leq (2^{2^{d+1}})^n \qquad |F(n)| = (2^{2^n})^n$$

Problème 5: Quelles conséquences a la condition "degré-borné"?

Localiser les fonctions locales

Soit $F(n)$ l'ensemble des RBs à n composantes.

Soit $F(n,d)$ l'ensemble des $f \in F(n)$ avec un GI G vérifiant $\Delta^-(G) \leq d$.
$\hookrightarrow$ chaque fonction locale f_i dépend d'au plus d composantes.

Pour d fixé, la condition $\Delta^-(G) \leq d$ est **naturelle** et **très très forte**:

$$|F(n,d)| \leq (2^{2^{d+1}})^n \qquad |F(n)| = (2^{2^n})^n$$

Problème 5: Quelles conséquences a la condition "degré-borné"?

Ex. [Aracena, Bridoux, Gadouleau, Guillon, Perrot, R., Theyssier, 2026]
Si $f \in F(n,d)$, le nb de points fixes de f n'est pas dans $]2^n - 2^{n-d}, 2^n[$.

Localiser les fonctions locales

Soit $F(n)$ l'ensemble des RBs à n composantes.

Soit $F(n,d)$ l'ensemble des $f \in F(n)$ avec un GI G vérifiant $\Delta^-(G) \leq d$.
↪ chaque fonction locale f_i dépend d'au plus d composantes.

Pour d fixé, la condition $\Delta^-(G) \leq d$ est **naturelle** et **très très forte**:

$$|F(n,d)| \leq (2^{2^{d+1}})^n \qquad |F(n)| = (2^{2^n})^n$$

Problème 5: Quelles conséquences a la condition "degré-borné"?

Ex. [Aracena, Bridoux, Gadouleau, Guillon, Perrot, R., Theyssier, 2026]
Si $f \in F(n,d)$, le nb de points fixes de f n'est pas dans $]2^n - 2^{n-d}, 2^n[$.

Problème 6: Théorème "à la Rice" dans le cas "degrés-borné"?

↪ aka les RBs "degré-borné" sont-ils des systèmes complexes?

Asynchronisme 1/3

RBs introduits pour les réseaux de gènes dans les années 70 par:

- Stuart Kauffman $\rightarrow$ mise à jour **synchrone**
- René Thomas $\rightarrow$ mise à jour **asynchrone**

Asynchronisme 1/3

RBs introduits pour les réseaux de gènes dans les années 70 par:

- Stuart Kauffman $\rightarrow$ mise à jour **synchrone**
- René Thomas $\rightarrow$ mise à jour **asynchrone**

Soit f un RB à n composante. Mise à jour asynchrone de i en x:

$$f^i(x) = (x_1, \ldots, f_i(x), \ldots, x_n).$$

Asynchronisme 1/3

RBs introduits pour les réseaux de gènes dans les années 70 par:

- Stuart Kauffman $\rightarrow$ mise à jour **synchrone**
- René Thomas $\rightarrow$ mise à jour **asynchrone**

Soit f un RB à n composante. Mise à jour asynchrone de i en x:

$$f^i(x) = (x_1, \ldots, f_i(x), \ldots, x_n).$$

On obtient un **automata fini déterministe**:

- Alphabet: $\Sigma = [n]$ (composantes)
- États: $Q = \{0,1\}^n$ (configurations)
- Lire i depuis la configuration x, c'est passer à la configuration $f^i(x)$.

Asynchronisme 1/3

RBs introduits pour les réseaux de gènes dans les années 70 par:

- Stuart Kauffman $\rightarrow$ mise à jour **synchrone**
- René Thomas $\rightarrow$ mise à jour **asynchrone**

Soit f un RB à n composante. Mise à jour asynchrone de i en x:

$$f^i(x) = (x_1, \ldots, f_i(x), \ldots, x_n).$$

On obtient un **automata fini déterministe**:

- Alphabet: $\Sigma = [n]$ (composantes)
- États: $Q = \{0,1\}^n$ (configurations)
- Lire i depuis la configuration x, c'est passer à la configuration $f^i(x)$.

Pour $w = i_1, i_2, \ldots, i_k$ un mot sur $[n]$, on note f^w le RB défini par

$$f^w(x) = (f^{i_k} \circ \cdots \circ f^{i_2} \circ f^{i_1})(x)$$

Asynchronisme 2/3

Théorème [Cameron, Fairbairn, Gadouleau 2014]

$\exists f \in F(n)$ tel que, pour toute bijection $h \in F(n)$, $\exists w \in [n]^*$ tel que

$$f^w = h.$$

$\hookrightarrow$ calcul sans mémoire.

Asynchronisme 2/3

Théorème [Cameron, Fairbairn, Gadouleau 2014]
$\exists f \in F(n)$ tel que, pour toute bijection $h \in F(n)$, $\exists w \in [n]^*$ tel que

$$f^w = h.$$

$\hookrightarrow$ calcul sans mémoire.

Théorème [Bridoux, Gadouleau, Theyssier 2025+]
$\forall h \in F(n)$, $\exists f \in F(n)$ et $w \in [n]^*$ tels que

$$f^w = h.$$

Asynchronisme 2/3

Théorème [Cameron, Fairbairn, Gadouleau 2014]

$\exists f \in F(n)$ tel que, pour toute bijection $h \in F(n)$, $\exists w \in [n]^*$ tel que

$$f^w = h.$$

$\hookrightarrow$ calcul sans mémoire.

Théorème [Bridoux, Gadouleau, Theyssier 2025+]

$\forall h \in F(n)$, $\exists f \in F(n)$ et $w \in [n]^*$ tels que

$$f^w = h.$$

$\hookrightarrow$ le synchrone est toujours simulable par l'asynchrone.
$\hookrightarrow$ pas de RB "intrinsèquement synchrone".
$\hookrightarrow$ **faux** dans le cas non-binaire $q \geq 3$.

Asynchronisme 3/3

Un mot w **synchronise** f si $f^w = \mathrm{cst}$.

Asynchronisme 3/3

Un mot w **synchronise** f si $f^w = \mathrm{cst}$.

Problème 7 : Conjecture de Černý' (1964) pour les réseaux Booléens

Si $f \in F(n)$ a un mot synchronisant, alors il en a un de longueur au plus

$$(2^n - 1)^2 \sim 4^n$$

Asynchronisme 3/3

Un mot w **synchronise** f si $f^w = \mathrm{cst}$.

Problème 7 : Conjecture de Černý' (1964) pour les réseaux Booléens

Si $f \in F(n)$ a un mot synchronisant, alors il en a un de longueur au plus

$$(2^n - 1)^2 \sim 4^n$$

Théorème [Aracena, R., Salinas, 2023]

Soit G signé, fortement connexe, sans cycle positif, avec $\Delta^-(G) = 2$.

Tout $f \in F(G)$ a un mot synchronisant de longueur $o(4^n)$.

Asynchronisme 3/3

Un mot w **synchronise** f si $f^w = \mathrm{cst}$.

Problème 7 : Conjecture de Černý' (1964) pour les réseaux Booléens

Si $f \in F(n)$ a un mot synchronisant, alors il en a un de longueur au plus

$$(2^n - 1)^2 \sim 4^n$$

Théorème [Aracena, R., Salinas, 2023]

Soit G signé, fortement connexe, sans cycle positif, avec $\Delta^-(G) = 2$.

Tout $f \in F(G)$ a un mot synchronisant de longueur $o(4^n)$.

$\hookrightarrow$ Si on enlève "fortement connexe" ou "sans cycle positif" il est NP-difficile de décider si $f \in F(G)$ a un mot synchronisant.

Asynchronisme 3/3

Un mot w **synchronise** f si $f^w = \mathrm{cst}$.

Problème 7 : Conjecture de Černý' (1964) pour les réseaux Booléens

Si $f \in F(n)$ a un mot synchronisant, alors il en a un de longueur au plus

$$(2^n - 1)^2 \sim 4^n$$

Théorème [Aracena, R., Salinas, 2023]

Soit G signé, fortement connexe, sans cycle positif, avec $\Delta^-(G) = 2$.

Tout $f \in F(G)$ a un mot synchronisant de longueur $o(4^n)$.

$\hookrightarrow$ Si on enlève "fortement connexe" ou "sans cycle positif" il est NP-difficile de décider si $f \in F(G)$ a un mot synchronisant.

Meilleure borne inf [communiquée par Gaétant Richard]

$\exists f \in F(n)$ tel que tout mot synchronisant f est de longueur $\Omega(n^2)$.

Conclusion

Réseaux d'automates = modèle minimal et naturel pour étudier :

- les systèmes complexes,
- les relations locales/globales,
- les relations structures/dynamiques.

Conclusion

Réseaux d'automates = modèle minimal et naturel pour étudier :

- les systèmes complexes,
- les relations locales/globales,
- les relations structures/dynamiques.

Cette étude, qui utilise la

- theorie de la complexité,
- théorie des graphes,
- théorie des ensembles,
- théorie de l'information, etc,

produit une **théorie des automates**

- riche,
- élégante, d'après moi, et
- très ouverte : nombreuses questions simples à formuler, mais profondes.